Test Person

Email: testperson@example.com
Classe: E1a
Insegnante: Professor Teacher

2021-01-16

SimEx - (possibile senza SEB e controllo)

Conteggio parole: 7

SOLUZIONE COMPLETA DELLA SECONDA PARTE DELLA SIMULAZIONE

Es (1)

$f(x) = \frac{1+2\ln(x)}{2x^2}$ Dominio $= D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 0, x > 0\}$
$= \{x > 0\}$

f é ottenuta come somma/prod/quoz. di funz. elem. su D quindi é continua su D : $D^{(0)} = D = (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{1+2\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{2x^2}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ per l'algebra degli infiniti

ASINTOTO VERT: $x=0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)\overbrace{\left(2+\frac{1}{\ln(x)}\right)}^{\to 2}}{2x^2} = 0$$

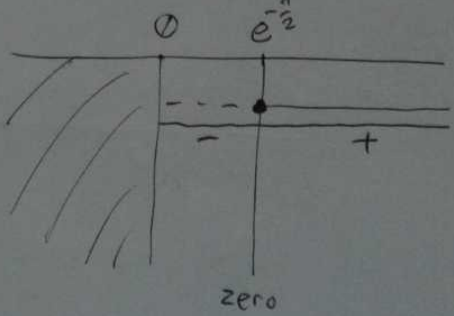
$\to 0$ per gerarchia degli infiniti

ASINTOTO ORIZZ (OBLIQUO) $y=0$

Segno (serve per il grafico)

$N \geq 0 \quad 1+2\ln(x) \geq 0 \quad \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \quad x > e^{-\frac{1}{2}}$

$D > 0 \quad \forall x \in D$



Zeri : $\{e^{-\frac{1}{2}}\}$

$D^+ = (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$

$D^- = (0, e^{-\frac{1}{2}})$

$$f'(x) = \frac{2\frac{1}{\cancel{x}}2x^{\cancel{2}} - 4x(1+2\ln(x))}{4x^4} = \frac{\cancel{4x}-\cancel{4x}-8x\ln(x)}{4x^4} =$$

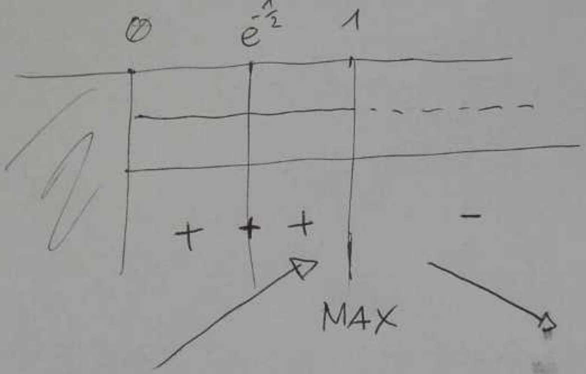
$$= -\frac{2\ln(x)}{x^3}$$

PUNTI ESTREMALI : $f'(x)=0 \iff \ln(x)=0 \iff x=1$

Un punto estremale : $x=1$

MONOTONIA : $f'(x) \geq 0$ $\quad -2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 0 \iff x \leq 1$

$x^3 > 0 \quad \forall x \in D$



$x=1$ é punto di massimo (assoluto)

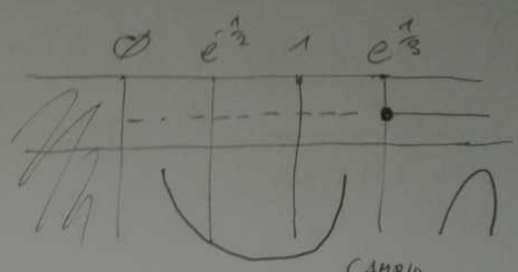
$\nexists$ punti di minimo (rel. e assoluto)

$$f''(x) = \frac{-2\frac{1}{\cancel{x}}x^{\cancel{3}\,2} + 3x^2 \cdot 2\ln(x)}{x^6} = \frac{6\ln(x)-2}{x^4}$$

Concavitá : $6\ln(x)-2 \geq 0 \quad \ln(x) \geq \frac{1}{3} \quad x \geq e^{\frac{1}{3}}$

$x^4 > 0 \quad \forall x \in D$ $\qquad (e^{1/3} > 1)$

Segno $f''(x)$:



$f''(x) = 0 \iff$
$x = e^{1/3}$

é flesso se cambia la concavità

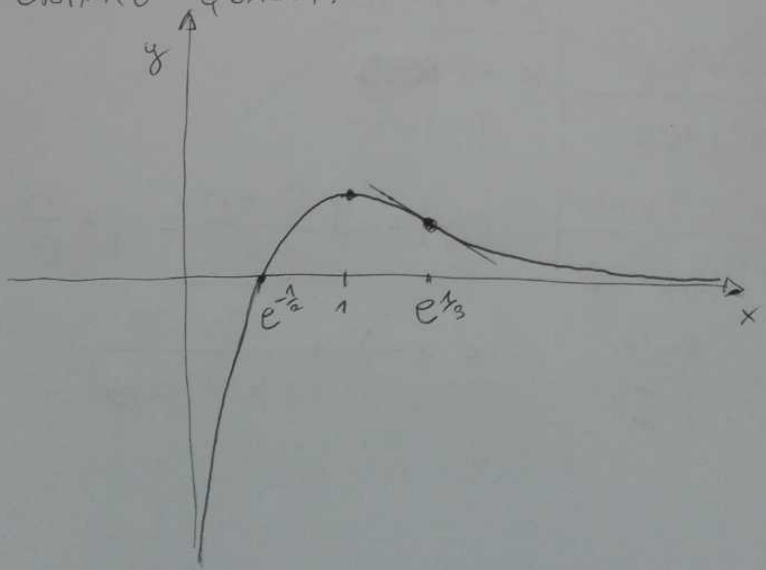
CAMBIO DI CONCAVITÀ
→ FLESSO

TANG. INFLESS.
$$f'(e^{\frac{1}{3}}) = -\frac{2\ln(e^{\frac{1}{3}})}{(e^{1/3})^3} = -2\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{e} = -\frac{2}{3e}$$

$$f(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1+2\ln(e^{\frac{1}{3}})}{2(e^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1+\frac{2}{3}}{2e^{2/3}} = \frac{5}{6e^{2/3}}$$

$$\rightarrow \quad y = \frac{5}{6e^{2/3}} + (x - e^{\frac{1}{3}})\left(-\frac{2}{3e}\right)$$

GRAFICO QUALIT.



Es 2

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x-10}$$

Dominio $= D = \{x^2+3x-10 \neq 0\}$
$= \{x \neq 2 \text{ e } x \neq -5\}$

$x^2+3x-10$
$\shortparallel$
$(x-2)(x+5)$

f é cont. su D e $I = (-2, 0) \subsetneq D$

quindi f ha primitiva su I.

Tutte le primitive sono del tipo $F+K$ con F primitiva particolare: $K \in \mathbb{R}$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K \quad K \in \mathbb{R}$$. Ricavo una primitiva.

Divisione tra N e D:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2+3x-10 \\ \hline
-x^3-3x^2+10x & x-3 \\ \hline
// \quad -3x^2+10x & \text{quoziente} \\
\quad +3x^2+9x-30 & \\ \hline
\quad // \quad 19x-30 & \\
\quad \text{Resto} &
\end{array}$$

$$f(x) = \frac{q \cdot D + r}{D} = q + \frac{r}{D}$$

$$= x-3 + \frac{19x-30}{(x-2)(x+5)}$$

$$\frac{19x-30}{(x-2)(x+5)} \overset{!}{=} \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+5)} = \frac{x(A+B)+(5A-2B)}{D}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 19 = A+B \\ -30 = 5A-2B \end{cases} \quad \begin{cases} B = 19-A \\ -30 = 5A-38+2A \end{cases} \quad \begin{cases} B = 19-A \\ 8 = 7A \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 19 - 8/7 = \frac{133-8}{7} = \frac{125}{7} \\ A = 8/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{x-3+\frac{8}{7}\frac{1}{(x-2)} + \frac{125}{7}\frac{1}{(x+5)}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \left(\quad \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{8}{7}\ln|x-2| + \frac{125}{7}\ln|x+5| + k$$

$k \in \mathbb{R}$.

Su I $\quad x-2<0$, $x+5>0$ $\Rightarrow$

$$\text{su } I \int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{8}{7}\ln(2-x) + \frac{125}{7}\ln(x+5) + k$$

$k \in \mathbb{R}$.

Essendo f continua su $[-1,1]$ f ha integrale def su $[-1,1]$ e vale

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{8}{7}\ln(2-x) + \frac{125}{7}\ln(x+5)\right]_{-1}^{1} =$$

teo fond. calcolo int.

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - 3 - 3 + \frac{8}{7}\left(\ln(2) - \ln(3)\right) + \frac{125}{7}\left(\ln(6) - \ln(4)\right) =$$

$G(x) = \int_{-1}^{x} 7 f(t)\,dt$ G é continua su $[-1,1]$ e deriv. su $(-1,1)$

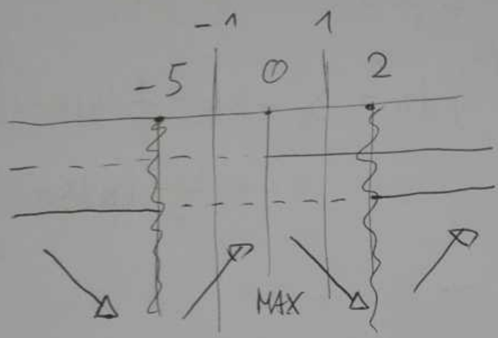
perché f é cont. su $[-1,1]$ per il teo di Torricelli-Barrow. e $G'(x) = 7f(x)$.

$$G' = 7\frac{x^3}{(x-2)(x+5)}$$

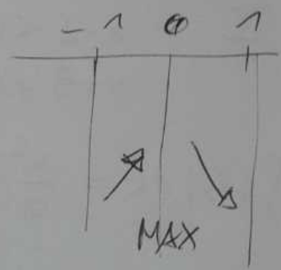
$G' \geq 0$

$N>0 \Rightarrow x>0$

$D>0 \Rightarrow x<-5 \vee x>2$



su $[-1,1]$:



$x=0$ é (unico) massimo di G su $[-1,1]$.

G ha minimo per il teo di Weierstrass (ed é agli estremi perché G é deriv. e non ci sono altri punti estremali oltre al punto di massimo).

Es ③

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 2w = 1 \\ 2y + 4z + 2w = 0 \\ 2x + y + (k^2-5k+4)z + w = 5-k \end{cases}$$

$AX = B$

Applico l'alg. di Gauss

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & k^2-5k+4 & 1 & 5-k \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2/2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & \cdot & -3 & 3-k \end{array}\right]$$

$k^2-5k+\cancel{4}-4$

$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-5k+6 & 0 & 3-k \end{array}\right] = \tilde{A}' = [A' | B']$$

"M"

Se $k^2-5k+6=0$ ho che A' ha rango 2 (Infatti ho una riga di 0 e $\det M \neq 0$ con M 2x2)

Se $k^2-5k+6 \neq 0$ $RKA' = 3$ (sottomatrice formata dalle prime 3 colonne ha $\det \neq 0$)

$k^2-5k+6 = (k-2)(k+3)$

GAUSS non modifica il rango.

$$RK(A) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} K \neq 2,3 & 3 \\ K = 2,3 & 2 \end{cases}$$

Se A ha rango 3 $\Rightarrow$ $RK(\tilde{A}) = 3$

$\llcorner$ A é matrice 3×4

Se $K=3$ l'ultima riga di $\tilde{A}'$ é nulla $\Rightarrow$

$RK(\tilde{A}') \leq 2$ e quindi $RK(\tilde{A}') = 2$ (M é sottomatrice di $\tilde{A}'$ anche)

se $K=2$ $M' = [\tilde{A}^1 | \tilde{A}^2 | \tilde{A}^5]$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow RK(\tilde{A}') = 3$

$$RK(\tilde{A}) = \begin{cases} K \neq 3 & 3 \\ K = 2 & 2 \end{cases}$$

Rouché-Capelli

Quindi il sistema ha soluz. $\Leftrightarrow K \neq 3$

Il numero di param. necess. per scrivere la soluzione é $n - Rk(A)$ (quando il sist ha sol!)

$$\Rightarrow 4 - \begin{cases} K=2 & 2 \\ K \neq 2,3 & 3 \end{cases} = \begin{cases} K=2 & 2 \\ K \neq 2,3 & 1 \end{cases}$$

Pongo $k=1$. Un sist. equiv. a quello assegnato è

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 2w = 1 \\ \quad\; y + 2z + w = 0 \\ \qquad\; 2z \qquad = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 2z - 2w + 1 \\ y = -w - 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2(-2-w) - 2 - 2w + 1 \\ y = -2 - w \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 + \cancel{2w} - 1 - \cancel{2w} \\ y = -2 - w \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 - w \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{Sol: } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 - w \\ z = 1 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2-w \\ 1 \\ w \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$