SOLUZIONE DEL SECONDO ESERCIZIO DELLO SCRITTO DI LUGLIO

Esercizio.

Siano date la superficie regolare S e il piano affine Π passante per il punto $Q = (1, 1, 0)$ e ortogonale al versore $\underline{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Sia $F : S \to \Pi$ la proiezione ortogonale di S su Π.

(1) Si dimostri che se P ha coordinate cartesiane (x, y, z) allora

$$F(P) = (1 + (x - y)/2, 1 - (x - y)/2, z)$$

e che F è un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$ tra superfici;

(2) Sia $P \in S$ un punto fissato. Sia $\varphi : U \to S$ una parametrizzazione locale per S in un intorno di P e siano (u, v) le coordinate su U. Sia dia $\eta(a, b)$ parametrizzazione locale per Π in un intorno di $F(P)$. Si scriva la rappresentazione in coordinate di F rispetto a φ e η. Si descriva il differenziale $d_P F$;

(3) Si descriva la relazione che intercorre tra i vettori $\underline{n}$, $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_P$ e $\frac{\partial}{\partial v}\Big|_P$ e la dimensione del nucleo di $d_P F$. (La dimensione di $\ker(d_P F)$ è $0, 1, 2, 3, \ldots$ se e solo se...)

Dobbiamo scrivere la proiezione ortogonale di S sul piano Π passante per $Q = (1, 1, 0)$ e con normale $\underline{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. L'equazione del piano è $0 =< \underline{x} - Q, \underline{n} >$ da cui otteniamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1 + y - 1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Pi : x + y - 2 = 0$$

Per scrivere la proiezione ortogonale su Π scegliamo un suo punto, ad esempio Q, e per ogni $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ scriviamo il vettore $\overrightarrow{QP} = P - Q = (x - 1, y - 1, z)$. Come ogni vettore, $\overrightarrow{QP}$ si scrive in unico modo come somma di un vettore $\pi(\overrightarrow{QP})$ che appartiene alla giacitura di Π e un vettore ortogonale alla giacitura. Essendo $\underline{n}$ un versore ortogonale alla giacitura di Π, per ottenere il vettore $\pi(\overrightarrow{QP})$ basta togliere a $\overrightarrow{QP}$ il vettore $< \underline{n}, \overrightarrow{QP} > \underline{n}$:

$$\pi(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{QP} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 2)\underline{n} = (x - 1, y - 1, z) - \frac{1}{2}(x + y - 2)(1, 1, 0).$$

A questo punto, avremo $F(P) = Q + \pi(\overrightarrow{QP})$ cioè

$$F(P) = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(x - y, y - x, z) = (1 + (x - y)/2, 1 - (x - y)/2, z).$$

Siccome F è la restrizione di un'applicazione affine di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ alla superficie S abbiamo che F è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Scriviamo Π come superficie regolare. Abbiamo già visto che l'equazione del piano è $x + y - 2 = 0$ quindi possiamo dare una parametrizzazione globale per Π (visto come grafico della funzione $f(x, z) = x - 2$):

$$\eta(a, b) = (a, 2 - a, b) \qquad (a, b) \in V = \mathbb{R}^2$$

mentre la sua inversa è la proiezione

$$\eta^{-1}(x,y,z) = (x,y) \qquad (x,y,z) \in \Pi.$$

Un atlante per Π è

$$\mathcal{A} = \{\eta : U \to \mathbb{R}^3\}.$$

Sia quindi $P \in S$ e scegliamo, come da richiesta dell'esercizio, una parametrizzazione locale $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ per S con $P \in \varphi(U)$. La rappresentazione in coordinate $\hat{F}$ di F è

$$\hat{F}(u,v) = (\eta^{-1} \circ F \circ \varphi)(u,v) = \left(1 + \frac{\varphi_1(u,v) - \varphi_2(u,v)}{2}, \varphi_3(u,v)\right).$$

Il differenziale di F in P è rappresentato, rispetto alle basi indotte da φ su T_PS e da η su $T_{F(P)}\Pi$, dalla matrice Jacobiana di $\hat{F}$:

$$\mathrm{Jac}(\hat{F})(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Siccome la mappa che stiamo considerando è una proiezione ortogonale, i vettori che ci aspettiamo vengano mandati a zero sono esattamente quelli che corrispondono alla direzione normale al piano. Vediamo di giustificare questo ragionamento euristico.

Si noti che il rango di $\mathrm{Jac}(\hat{F})$ non può essere 0. Se così fosse, infatti, si avrebbe che

$$\frac{\partial}{\partial u}|_P(u,v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial v}|_P(u,v)$$

sono multipli e la cosa non può essere poichè φ è una parametrizzazione locale. Di conseguenza, $\dim(\ker(d_PF)) \in \{0,1\}$.

Il vettore $\underline{n}$ appartiene a T_PS se e solo se

$$\mathrm{Rk}\left(\left[\frac{\partial}{\partial u}|_P, \frac{\partial}{\partial v}|_P, \underline{n}\right]\right) = 2,$$

cioè se e solo se $\det\left(\left[\frac{\partial}{\partial u}|_P, \frac{\partial}{\partial v}|_P, \underline{n}\right]\right) = 0$. Svolgendo esplicitamente i conti si vede che

$$\det(\mathrm{Jac}(\hat{F})) = \lambda \det\left(\left[\frac{\partial}{\partial u}|_P, \frac{\partial}{\partial v}|_P, \underline{n}\right]\right)$$

con $\lambda \neq 0$ opportuno. Di conseguenza,

$$\underline{n} \in T_PS \iff \dim(\ker(d_PF)) = 1.$$

Per essere più precisi, abbiamo che

$$\ker(d_PF) = \langle \underline{n} \rangle \cap T_PS.$$