Esercizi per il corso di Geometria 2

Davide Astesiano

21 giugno 2019

1 Martedì 14/05/2019

Exercise 1-1: Si prenda una curva piana e si dimostri che la definizione di curvatura nella forma $k(s) = |\ddot{\sigma}|$, è equivalente a riguardare la curva (dove possibile) come una funzione e definire $k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ dove α è l'angolo che la tangente forma con l'asse x in ogni punto.
Si descriva anche la concavità della curva tramite la forma parametrica.

Exercise 1-2: Tramite gli strumenti sviluppati nell'esercizio precedente, calcolare attraverso le due diverse rappresentazioni la curvatura delle seguenti curve

- di una circonferenza
- di una catenaria ($\gamma(t) = (t, \cosh t)$)

Exercise 1-3: Si assuma che tutte le normali di una curva passino attraverso un punto fissato, si dimostri che il sostegno della curva è la circonferenza. Si assuma che tutte le tangenti di una curva passino attraverso un punto fissato, si dimostri che il sostegno della curva è la retta. Cosa succede se la curva non è regolare?

Exercise 1-4: Disegnare la curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ detto il Folium di Cartesio.

Exercise 1-5: Si prenda una curva piana regolare, la si riscriva in coordinate polari e si calcoli la lunghezza d'arco e la curvatura.

Exercise 1-6: Si prenda la curva tale che in ogni punto il versore tangente ad essa forma un angolo costante con il versore radiale uscente da un sistema di assi cartesiano. Di che tipo di curva si tratta? (è la Spirale logaritmica, che in coordinate polari si può riscrivere come $r = b\, e^{a\theta}$)

Exercise 1-7: Si prenda un sistema di assi cartesiano, si posizionino due fuochi in $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ e si prenda l'insieme dei punti tali che la moltiplicazione delle distanze da questi punti sia una costante.

- Quante curve differenti tra loro si riescono a disegnare?
- Una di queste figure è il cosiddetto lemniscato. La si descriva in forma cartesiana,in forma polare ed in forma parametrica e si deduca il suo sostegno.
  Una versione leggermente diversa di questa figura si può ottenere considerando $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = (2sin(t), sin(2t))$. Si dimostri che la parametrizzazione è regolare e che esiste un diffeomorfismo $P : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ tale che la riparametrizzazione $\Gamma = \gamma \circ P^{-1}$ è una bigezione di $\mathbb{R}$ su Y, dove $Y = \gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.La funzione Γ non è un omeomofismo di $\mathbb{R}$ su Y (con la topologia di sottospazio). (Si veda foglio 1 esercizio 2 del Professor Pigola.)

2 Lunedì 20/05/2019

Exercise 2-1: Si prenda una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

- Si dimostri che se il sostegno di tale curva è contenuto in una sfera di raggio R allora il legame tra la torsione e la curvatura soddisfa

$$\frac{1}{k^2} + \frac{\dot{k}^2}{k^4 \tau^2} = R^2 \tag{1}$$

- Si dimostri che vale anche l'implicazione opposta se $\dot{k}$ non si annulla mai.

Exercise 2-2: Si studino e si calcoli la curvatura, la torsione ed il riferimento di Frenet delle seguenti curve spaziali

- $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con forma parametrica $\alpha(u) = (u, u^2, u^3)$;
- $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ con forma parametrica $\alpha(u) = (u, \frac{1+u}{u}, \frac{1-u^2}{u})$.

Exercise 2-3: Esercizio (3.11) dell'eserciziario del Professor Pigola.

3 Lunedì 27/05/2019

Exercise 3-1: Esercizio (2.9) dell'eserciziario del Professor Pigola.

Exercise 3-2: Continuazione esercizio (3.11) dell'eserciziario del Professor Pigola.

- In queste coordinate scrivere la prima forma fondamentale della sfera.

- Si prenda un piano e lo si intersechi con la sfera. Sotto quali condizioni le curve nel piano che si ottengono tramite la proiezione stereografica sono rette o circonferenze?
- Si scrivano in coordinate sferiche le curve (con il sostegno contenuto nella sfera) tali che l'angolo che formano intersecando i meridiani sia sempre costante. Queste curve, che si chiamano "lossodromie", in quali curve nel piano vengono proiettate usando la proiezione stereografica?

Exercise 3-3: Si dimostri che il nastro di Möbius è una superficie regolare non orientabile.

4 Mercoledì 05/06/2019

Exercise 4-1: Si consideri la superficie con parametrizzazione

$$\vec{x}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2) \tag{2}$$

detta "superficie di Enneper". Si calcolino la prima forma fondamentale, la seconda forma fondamentale, le curvature principali e si dimostri che le linee di curvatura sono le linee coordinate.

Exercise 4-2: Esercizio del foglio 7 n.2 dell'eserciziario del Professor Pigola.
Sia S una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che:

- La curvatura Gaussiana di S è invariante per congruenze dell'ambiente $\mathbb{R}^3$.
- La curvatura media di S è invariante per rototraslazioni dell'ambiente $\mathbb{R}^3$.
- La curvatura media di S non è invariante per congruenze dell'ambiente $\mathbb{R}^3$.

5 Mercoledì 12/06/2019

Exercise 5-1: Si considerino due numeri reali a e r tali che $0 < r < a$. Sia $\eta(t) := a + r\cos(t)$. Come avete visto a lezione, le parametrizzazioni locali standard del toro S, come superficie di rotazione, si ottengono restringendo la funzione

$$\varphi(u,v) = (\eta(u)\cos(v), \eta(u)\sin(v), r\sin(u))$$

su quattro aperti $U_1, \ldots, U_4$. Si ponga $W_i = \phi(U_i)$ in modo che W_i sia un aperto denso del toro. Si scelga una di queste parametrizzazioni locali esplicitando cosa sono U_i e W_i (che chiameremo, per comodità, U e W). Sia poi P_0 un punto dell'aperto W_i scelto.

- Si dimostri che il toro S è orientabile scrivendo esplicitamente una mappa di Gauss $N : S \to S^2$ per il toro e la si rappresenti, su W, nelle coordinate scelte.

- Nelle coordinate scelte ricavare i coefficienti metrici e di forma e la curvatura Gaussiana K su W.
- Si discuta la natura dei punti di S (non solo quelli di W)[1]. Si ricavino le direzioni principali (senza stare a distinguere qual è l'autovalore maggiore e minore) in P_0.
- Posto $(u_0, v_0) = \varphi^{-1}(P_0)$, siano $\gamma(s)$ e $\delta(s)$ le linee coordinate uscenti da P_0 parametrizzate con lunghezza d'arco. Queste curve sono linee di curvatura per S? Per quali P_0 si ha che esistono direzioni asintotiche in P_0?
- Calcolare le funzioni $\kappa(s)$ e $\kappa_n(s)$ (cioè curvatura e curvatura normale rispetto a S) di γ e δ.
- Si considerino le funzioni $f_1, f_2 : S \to \mathbb{R}$ date da

  $$f_1(x,y,z) = \frac{1}{r\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_2(x,y,z) = \frac{z}{r\sqrt{x^2+y^2}}.$$

  Dopo avere mostrato che f_i sono funzioni $C\infty$, si calcoli l'area di T e gli integrali[2] di $\int_S f_i d\nu$.
- Si ponga, per semplicità[3] $a = 2, r = 1$. Siano $c, d \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$ e si consideri la funzione $\Gamma : T \to T$ tale che

  $$\Gamma \begin{pmatrix} \eta(u)\cos(v) \\ \eta(u)\sin(v) \\ r\sin(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta(nu+c)\cos(mv+d) \\ \eta(nu+c)\sin(mv+d) \\ r\sin(nu+c) \end{pmatrix}$$

  Senza specificare l'insieme di definizione, scrivere la rappresentazione in coordinate di Γ e dire se è C^∞. Per quali scelte dei parametri n, m, c, d è conforme? Per quali scelte dei parametri è un'isometria? Per quali scelte dei parametri è isoareale?

Exercise 5-2: Esercizio del foglio 7 n.7 dell'eserciziario del Professor Pigola.
Sia $S = \mathrm{Graf}_{\mathbb{R}^2}(f)$ dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia che dipende solo dalla variabile x:

$$f(x,y) = f(x) \tag{3}$$

Si dimostri che S è minima se e soltanto se è un piano affine.

Exercise 5-3: Esercizio del foglio 7 n.20 dell'eserciziario del Professor Pigola.

[1] Hint: K è una funzione C^∞ e W è denso...

[2] Siccome abbiamo preso W denso in S, ci basta calcolare l'area e gli integrali su una regione regolare $R \subset W$ e poi far tendere la regione a W. Ad esempio, scegliamo, nello spazio dei parametri, un compatto di forma rettangolare e poi facciamo tendere il rettangolo all'aperto U

[3] Serve solo per non avere cinquantamila parametri: in realtà il conto non dovrebbe essere tremendo.

Exercise 5-4: Leggera modifica ed ampliamento dell'esercizio del foglio 7 n.3 dell'eserciziario del Professor Pigola. Si prenda in $\mathbb{R}^3$ il piano yz definito da $x = 0$ e si consideri una curva regolare descritta da

$$y = f(t) \qquad z = g(t). \tag{4}$$

- Si scriva l'equazione della superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare la curva attorno all'asse z.
- Come devono essere fatte f e g per ottenere un cono, un ellissoide,un paraboloide ed un toro? Si discutano le soluzioni trovate.
- Si riguardi la curva come una funzione, $z = g(y)$ sempre nel piano $x = 0$. Scrivere le forme cartesiane e parametriche della superficie di rotazione risultante, indicare sotto quali condizioni è regolare e calcolare il vettore normale.
- Si calcolino i coefficienti metrici, la seconda forma fondamentale e le curvature media e Gaussiana di una superficie di rotazione generica.
- Si verifichi che la pseudosfera, ottenuta per rotazione attorno all'asse z della curva $Y : (\pi/2, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$Y(t) = (\sin t, 0, \cos t + \log(\tan(t/2))) \tag{5}$$

ha curvatura Gaussiana costante $K = -1$.

6 Mercoledì 19/06/2019

Exercise 6-1: Sia $R > 0$ e si considerino il paraboloide iperbolico

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 - y^2\}$$

e il cilindro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}.$$

- Si dimostri che S è una superficie e che è orientabile esibendo un atlante orientato $\mathcal{A}$ e una mappa di Gauss $N : S \to S^2$ coerente con l'atlante scelto.
- Si scriva una curva differenziabile regolare $[\gamma]$ che ha supporto coincidente con l'intersezione $C = S \cap T$. E' una curva chiusa?
- Scrivere l'integrale che calcola la lunghezza delle curva γ e determinarne il comportamento asintotico quando $R \to 0$ e $R \to \infty$.
- Si calcoli l'area della regione regolare su S che ha come bordo C.
- Si ponga $R = 1$. Si calcoli curvatura, torsione e curvatura normale di γ (come curva in S) nei punti in cui la curva incontra il piano $z = 0$.
- Si calcolino le direzioni principali e le curvature principali nel punto $Q = (1, 1, 0)$.